輪講資料: Randomized Cellular Automata and Coupled Map Lattices
(改訂版)

RWCP 情報統合研究室　金田　泰

この資料はつぎの論文から題材をとっている．これらの論文をとりあげたのは，ランダムさをとりいれた計算とくに計算順序をランダムにした計算に興味があるから．

Wolfram, S.: Universality and Complexity in Cellular Automata, *Physica D*, 10, 1–35, 1984 (introduction のため).

Ingerson, T. E., and Buvel, R. L.: Structure in Asynchronous Cellular Automata, *Physica D*, 10, 59–68, 1984.

Kaneko, K.: Pattern Dynamics in Spatiotemporal Chaos, *Physica D*, 34, 1–41, 1989.

1. Introduction (Wolfram)

❑ セル・オートマタ (CA) の定義 :

$a(i; t) = f(a(i-r; t-1), a(i-r+1; t-1), \ldots, a(i+r; t-1))$ ($a(i; t) \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ (k 値) は時刻 t におけるセル i の状態)．同期式の CA においては，すべてのセルの状態が同時に更新される．

❑ 周期境界条件

$a(n; t) \equiv a(0; t)$ とする．

❑ セル・オートマタの番号づけ ($k = 2$ (2 値) のとき)

$f(0, \ldots, 0, 0) = f_0$, $f(0, \ldots, 0, 1) = f_1$, $f(0, \ldots, 1, 0) = f_2$, $\ldots$, $f(1, \ldots, 1, 1) = f_{2\hat{}(2r+1)}$ として，$f_0 + 2 f_1 + \ldots + 2^{2r+1} f_{2\hat{}(2r+1)}$ を (CA の) ルールの番号とする．

$r = 1$ (両どなりのセルを参照) ならルールの総数は $2^{2\hat{}3} = 256$．

$r = 2$ ならルールの総数は $2^{2\hat{}5} = 2147483648$ (!)

❑ セル・オートマタの分類とその例 :

(同期式の) セル・オートマタはつぎのように分類される．

Class I: 一様な状態に発展する (すべてのセルの状態が 0 になるなど)．

Class II: 安定状態または周期状態に発展する．

Class III: カオス的なパタンに発展する．

Class IV: 複雑な局所的構造に発展する．長生きするばあいがある．

図 1 に例をしめす (図 1 は $k = 2, r = 2$ の「総和ルール」にしたがう CA のパタンであり，その番号づけは上記の番号づけとはことなる)．初期状態はランダム．

2. Asynchronized CA (Ingerson and Buvel)

❑ 2 種類の非同期セル・オートマタ (CA) :

(1) ランダム反復: 大域的な時計がすすむごとに，各セルが確率的に状態を更新する (量子力学からのアナロジー)．[毎時刻 1 個のセルを選択して更新している ?]

(2) 独立時計: 各セルが独立な時計をもち，それにしたがって状態を更新する．時計のきざみはガウス分布とし，すすみかたは一様とする．

❑ 計算結果

図 2 は $k = 2$，$r = 1$，セル数 $n = 128$ のときの結果．a. 同期 CA，b. ランダム反復，c. 独立時計のそれぞれ

の結果をこの順にならべたものである (ただし，すべてのセルを表示してはいない)．

Class I: a, b, c のいずれも一様な状態に発展する．ただし，ランダムにするとパタンがより長生きする．

Class II: Rules 94, 108 など以外は a, b, c のいずれも安定状態または周期状態に発展する．
Rule 94 はランダムにすると一様な状態に発展する．
Rule 108 はランダムにすると妙な発振現象をおこす．
Rule 50 は b では死滅し (Class I になり)，c では Class IV にちかいふるまいをする．
Rule 178 は後述の 146, 182と同様のふるまいをする．

Class III: Rule 54, 90, 122, 150 は a, b, c のいずれもカオス的なパタンに発展する．ただし，a では 3 角形をしている領域境界はゆらぐ．
Rule 126 ではこのような領域はみられない [真にカオス的 ?]．
Rules 146, 182 などでは白と黒の領域がきそいあう．Rule 182 ではつねに黒が勝つが，146 では白が勝つ．18 も同様．
Rule 22 はとくにおもしろい．結晶中で格子欠陥が移動するようなふるまいをする．欠陥同士が衝突すると通常ははねかえるが，対消滅することもある．実時間で観察すると結晶成長のようにみえる．

Class IV: [$r = 1$ のときは Class IV はあらわれない．しかし，Rule 50, 58 などはそれにちかい ?]

❑ 結論
この論文の目的は，「同期」の仮定はセル・オートマタにおいて本質的ではないこと，ある種のふるまいをかくしてしまうことを指摘することである．Rule 22 はとくに非同期式セル・オートマタが自然の自己組織現象の理解のための単純なモデルとして有用であることをしめしている．

3. Coupled Map Lattice (Kaneko)

❑ Coupled Map Lattice (CML) の定義：
CML は連続状態の CA．
$a(i;t) = (1-\varepsilon)\, a(i;t-1) + (\varepsilon/2)\left(f(a(i-1;\, t-1)) + f(a(i+1;\, t-1))\right)$ ($a(i;t) \in \mathbb{R}$ は時刻 t におけるセル i の状態)．
すべてのセルの状態が同時に更新される．

f として logistic map をつかう．
$f(x) = 1 - cx^2$

境界条件は周期的．

c を変化させて，ふるまいの変化 (相転移) をしらべる．

❑ 上記の CML の分類とその例：
i) 凍結したパタン (Frozen pattern) [Class I+II の CA に相当 ?]: 固定的なジグザグ構造がある．
ii) 欠陥拡散 (Diffusion of defect): 安定なジグザグ・パタンの領域境界 (欠陥) が空間的にうごく．
iii) カオス的媒質中の欠陥拡散 (Diffusion of defect in chaotic media): 安定なジグザグ・パタンの境界がカオス的にうごきまわる．
iV) 欠陥乱流 (Defect turbulence): ジグザグ・パタンはもはや安定ではない．欠陥が対発生する．
V) 完全なカオス (Fully developed chaos): あらゆる可能なパタンがランダムに生成される．

4. Concluding Remark (Kanada)

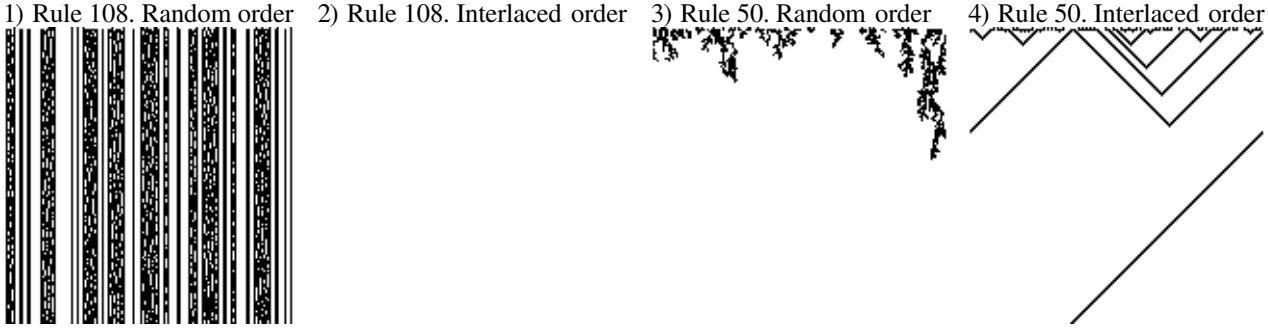
❑ Ingerson らが指摘しているように，非同期式セル・オートマタには，同期式にない (かくされている) おもしろさがある．

❑ 非同期式セル・オートマタ (ACA) と CML とでよく似たパタンが生成されることがある (図 4 の 15 と 図 3

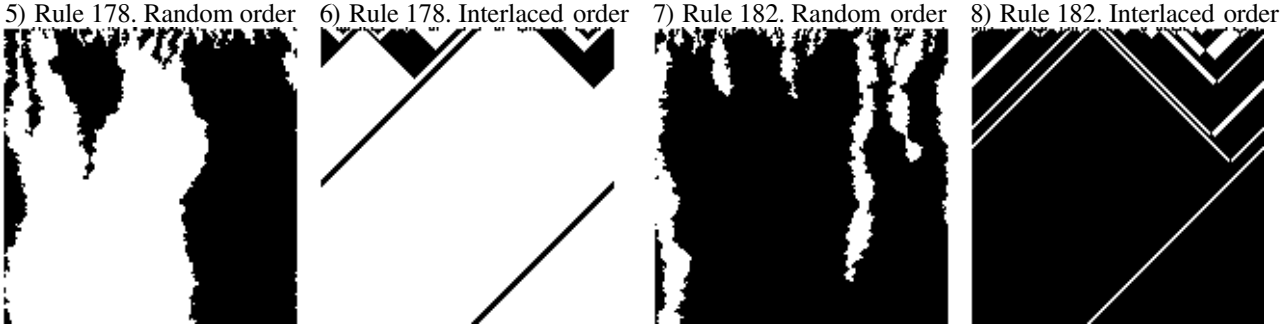
の b，図 4 の 17 と図 3 の c など)．これは，ACA における乱数と CML における logistic map がうみだすカオスとが似たはたらきをしているからだとかんがえられる．

❑ おまけ (金田による実験結果, 逐次反復 (ランダム反復および定順序反復), 152 cells, 76 clocks/pixel)

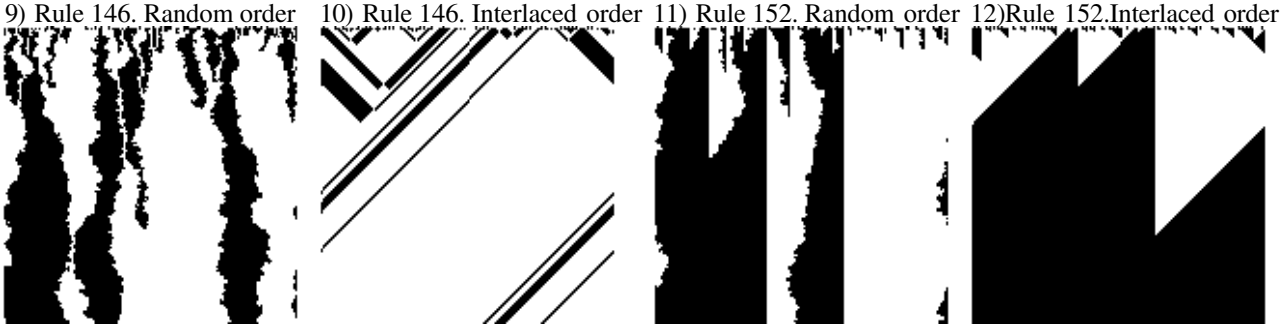
1) Rule 108. Random order 2) Rule 108. Interlaced order 3) Rule 50. Random order 4) Rule 50. Interlaced order



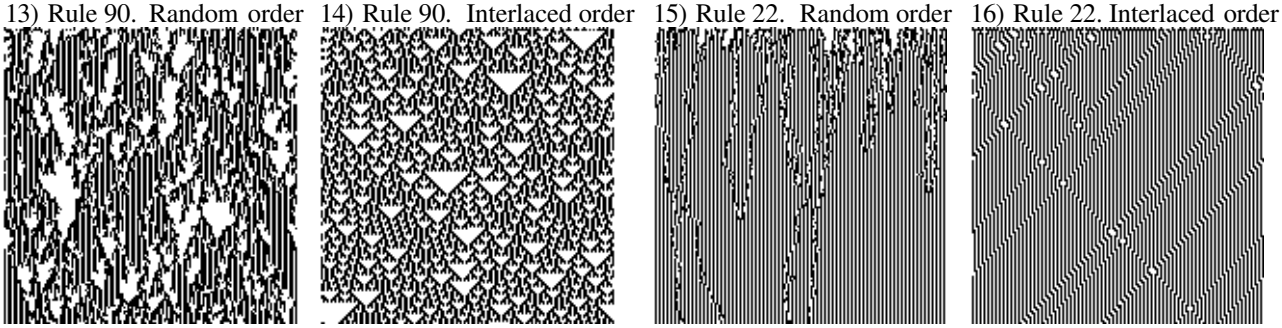
5) Rule 178. Random order 6) Rule 178. Interlaced order 7) Rule 182. Random order 8) Rule 182. Interlaced order



9) Rule 146. Random order 10) Rule 146. Interlaced order 11) Rule 152. Random order 12)Rule 152.Interlaced order



13) Rule 90. Random order 14) Rule 90. Interlaced order 15) Rule 22. Random order 16) Rule 22. Interlaced order



17) Rule 37. Random order 18) Rule 37. Interlaced order 19) Rule 58. Random order 20) Rule 166. Random order

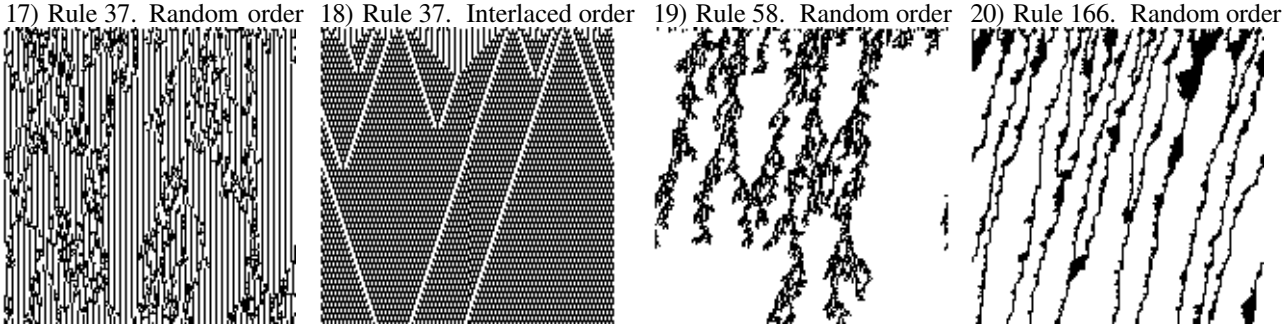


図 4　逐次セル・オートマタによって生成されたパタン ($k = 2$, $r = 1$)